Une version feuilletée d'un théorème de Bogomolov

Frédéric Touzet

▶ To cite this version:

HAL Id: hal-00125828
https://hal.science/hal-00125828
Preprint submitted on 22 Jan 2007

Université de Rennes 1
Institut de Mathématiques

UNE VERSION FEUILLETEE D'UN THEOREME DE BOGOMOLOV

FREDERIC TOUZET

Abstract:On compact Kähler manifolds, we classify regular holomorphic foliations of codimension 1 whose canonical bundle is numerically trivial.

1) Introduction

1.1 LE THEOREME DE BOGOMOLOV.

Parmi les variétés Kähleriennes compactes M, celles dont le fibré canonique est numériquement trivial sont caractérisées par le remarquable résultat suivant, dont la preuve est due à F.Bogomolov:

Théorème 1.1
Supposons que $c_1(M) = 0$; alors M admet un revêtement fini $\tilde{M}$ qui est le produit d'un tore par une variété de Calabi-Yau.

Rappelons qu'une variété Kählerienne est dite de Calabi-Yau si elle compacte, simplement connexe et admet une forme volume holomorphe partout non nulle.

Suivant le fameux théorème de Yau ([Ya]) (que nous invoquerons d'ailleurs ultérieurement), on peut munir une telle variété d'une métrique Ricci-plate dont l'holonomie induit une décomposition en produit de sous-variétés de Calabi-Yau irréductibles, c'est-à-dire dont le fibré tangent n'est pas holomorphiquement décomposable.

1.2 ANALOGUE FEUILLETE, EXEMPLES ET PRESENTATION DES RESULTATS.

Considérons une variété complexe M munie d'un feuilletage holomorphe régulier de codimension un. Ceci correspond à la donnée d'un sous fibré intégrable $\mathcal{F}$ du fibré tangent de rang $n-1$ ($n = dim_{\mathbb{C}}\ M$).

Il y a naturellement deux fibrés en droites associés à $\mathcal{F}$, le fibré normal et le fibré canonique du feuilletage qui sont respectivement $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \frac{TM}{\mathcal{F}}$ et $K_{\mathcal{F}} = Det\ \mathcal{F}^*$. Par adjonction, on hérite de l'isomorphisme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}{}^* \otimes K_{\mathcal{F}} = K_M \tag{1.1}$$

où K_M désigne comme à l'habitude le fibré canonique de la variété M.

Dans cet article, on s'interesse à la situation suivante: M est Kähler compacte et est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ dont la classe canonique est numériquement triviale,i.e

$$c_1(K_{\mathcal{F}}) = 0.$$

Cette configuration est clairement réalisée par les trois exemples décrits maintenenant:

i) A revêtement fini près, M est le produit d'un tore par une variété de Calabi-Yau et $\mathcal{F}$ est obtenu en tirant en arrière un feuilletage linéaire sur le premier facteur par la projection canonique.

ii) M est une fibration rationnelle au dessus d'une variété à première classe de Chern nulle (et par suite décrite par le théorème de Bogomolov) et le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse aux fibres.

iii) Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donnée par une fibration en hypersurfaces à première classe de Chern nulle.

Nous affirmons que cette liste est exhaustive:

Théorème 1.2
Soit M une variété kählerienne compacte munie d'un feuilletage holomorphe régulier de codimension un à fibré canonique numériquement trivial; alors ce feuilletage est décrit par l'un des exemples (non exclusifs) i),ii) ou iii) ci-dessus.

Remarque 1.1
Si l'on suppose de surcroît que $c_1(M) = 0$, on déduit de la formule d'adjonction (1.1) que $\mathcal{F}$ est défini par une forme holomorphe (éventuellement à valeurs dans un fibré plat) qui est donc identiquement nulle en restriction à toute sous-variété simplement connexe de M. Ceci correspond à la situation décrite en i). Ce cas facile sera exclu par la suite.

1.3 STRUCTURE DE L'ARTICLE

La première étape consiste à construire, par dualité de Serre, un feuilletage auxiliaire en courbes (un peu dans l'esprit de [Bo]).

On montre ensuite que la présence d'un tel feuilletage confère à la variété ambiante des propriétés métriques remarquables (pseudo-effectivité du fibré canonique). Cette partie s'appuie fortement sur des travaux de Marco Brunella qui étendent dans le cadre Kählerien certains des résultats de semi-positivité établis par Myaoka pour les variétés projectives, et dont une récente version est présentée dans $[\mathrm{Br}]_2$.

On conclut enfin en déroulant quelques théorèmes classiques de géométrie riemannienne, en particulier de Yau [Y], Cheeger et Gromoll [C,G].

2) Feuilletage en courbes associé.

2.1 PRELIMINAIRES

Considérons un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M tel que sur chaque ouvert de la famille, les feuilles de $\mathcal{F}$ soient données par les niveaux d'une submersion holomorphe

$$f_i : U_i \to \mathbb{C}.$$

Sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, les différentielles des f_i sont liées par la relation

$$df_i = g_{ij} df_j,\ g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$$

où le cocycle multiplicatif g_{ij} représente le fibré normal du feuilletage $N_{\mathcal{F}}$.

Le faisceau $\mathcal{F}_\infty$ des germes de $(1,0)$ formes différentielles lisses tangentes $\mathcal{F}$ est fin, ce qui assure l'existence de sections $\omega_i \in \mathcal{F}_\infty(U_i)$ vérifiant sur $U_i \cap U_j$:

$$\omega_i - \omega_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}.$$

Puisque les ω_i sont de la forme

$$g_i df_i$$

où $g_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$, on obtient par différentiation que

$$\overline{\partial} g_i = {g_{ij}}^{-1} \overline{\partial} g_j.$$

On constate ainsi que la collection des $\overline{\partial} g_i$ définit une classe α du groupe de cohomologie $H^{0,1}_{\overline{\partial}}({N_{\mathcal{F}}}^*)$.

En combinant, isomorphisme de Dolbeaut et dualité de Serre, on obtient que

$$Dim_{\mathbb{C}}\ H^{0,1}_{\overline{\partial}}({N_{\mathcal{F}}}^*) = Dim_{\mathbb{C}}\ H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}} \otimes K_M)$$

et par la formule d'adjonction (1.1)

$$H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(N_{\mathcal{F}} \otimes K_M) = H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(K_{\mathcal{F}}).$$

Le fibré $K_{\mathcal{F}}$ étant plat, on en déduit par théorie de Hodge que

$$H^{0,n-1}_{\overline{\partial}}(K_{\mathcal{F}}) \simeq H^{n-1,0}_{\overline{\partial}}(Det\ \mathcal{F}).$$

2.2 LE CAS $\alpha = 0$.

En reprenant les notations précédentes, il existe sur chaque ouvert U_i une fonction lisse φ_i telle que

$$\overline{\partial} g_i = \overline{\partial} \varphi_i,\quad \varphi_i = {g_{ij}}^{-1} \varphi_j\ sur\ U_i \cap U_j.$$

On en déduit alors que

$$\alpha_i df_i - \alpha_j df_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$$

où $\alpha_i = g_i - \varphi_i$ est holomorphe sur U_i, en conséquence de quoi le fibré ${N_\mathcal{F}}^*$ est muni d'une connexion *holomorphe*.

Puisque la variété ambiante est Kähler, ceci implique la platitude de ${N_\mathcal{F}}^*$ et permet de conclure par la remarque 1.1.

2.2 LE CAS $\alpha \neq 0$.

L'isomorphisme décrit en fin de section 2.1 permet d'exhiber sur M une $n-1$ forme holomorphe ω non identiquement nulle à valeurs dans $Det\ \mathcal{F}$. Localement, une telle forme a pour argument un multivecteur de degré $n-1$ et de ce point de vue, elle s'interprète naturellement comme une section holomorphe du fibré trivial $K_\mathcal{F} \otimes Det\ \mathcal{F}$. En particulier, la restriction de ω à $\mathcal{F}$ est soit identiquement nulle, soit partout non dégénérée. Notons $\mathcal{C}_\omega$ le feuilletage en courbe (éventuellement singulier) associé à ω.

On hérite donc de l'alternative suivante:

a) $\mathcal{C}_\omega$ est tangent au feuilletage $\mathcal{F}$,

b) $\mathcal{C}_\omega$ et $\mathcal{F}$ sont partout en position transverse (en particulier, $\mathcal{C}_\omega$ est régulier).

C'est cette dernière situation que nous allons considérer dans la section 3.

3) METRIQUE INDUITE PAR LE FEUILLETAGE EN COURBE TRANSVERSE

Examinons d'abord le cas où $\mathcal{C}_\omega$ admet une feuille rationnelle. Du théorème de stabilité de Reeb, il résulte que toutes les feuilles sont rationnelles. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc construit par une suspension de fibre $\mathbb{P}^1$ au-dessus d'une variété à première classe de Chern nécessairement nulle. Il s'agit donc de l'exemple ii) du théorème 1.2. Notons que l'holonomie de $\mathcal{F}$ est ici obtenue comme représentation de l'extension d'un groupe fini par un groupe abélien libre dans le groupe de Mœbius.

Si l'on exclu ce dernier cas de figure, il est établi dans [B,P,T] qu'un feuilletage en courbe $\mathcal{C}$ transverse à une distribution en hyperplan sur une variété Kähler compacte est parabolique ou hyperbolique: toutes les feuilles sont uniformisées soit exclusivement par la droite complexe, soit exclusivement par le disque unité. Il est plus précisément montré dans (*loc.cit*) que la distribution transverse est alors intégrable et possède (en tant que feuilletage) une métrique hermitienne lisse invariante par holonomie et induisant sur les feuilles de $\mathcal{C}_\omega$ une métrique naturelle (plate ou de Poincaré suivant le type conforme de $\mathcal{C}_\omega$). Dans le contexte étudié, lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\omega$ est parabolique , le fibré ${N_\mathcal{F}}^*$ est ainsi muni par transversalité d'une métrique à courbure nulle et nous sommes à nouveau dans la configuration décrite dans la remarque 1.1.

Il reste donc à traiter le cas hyperbolique. On obtient de même que ${N_\mathcal{F}}^*$ admet une métrique hermitienne dont la forme de courbure Ω est une $(1,1)$ forme fermé lisse positive et invariante par holonomie de $\mathcal{F}$.

Proposition 3.1

Supposons le feuilletage en courbes $\mathcal{C}_\omega$ hyperbolique.

La variété M peut être alors munie d'une métrique kählerienne g qui induit sur chaque feuille de $\mathcal{F}$ une métrique Ricci plate.

De plus, quitte à changer $\mathcal{C}_\omega$, $\tilde{M}$ (le revêtement universel de M) se scinde holomorphiquement et isométriquement sous la forme $\tilde{N} \times \mathbb{D}$. Cette décomposition de $\tilde{M}$ est compatible avec celle de TM en ce sens que $T\tilde{N}$ et $T\mathbb{D}$ (vus comme sous-fibrés de TM) sont respectivement pull-back de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}_\omega$.

Enfin, $\pi_1(M)$ agit diagonalement par isométries sur le produit $\tilde{M} = \tilde{N} \times \mathbb{D}$.

Preuve

Remarquons d'abord que la forme $-\Omega$ est un représentant de la classe anticanonique $c_1(M)$, eu égard à l'équivalence numérique de ${N_{\mathcal{F}}}^*$ et K_M.

D'après le théorème de Yau ([Y]), on en déduit l'existence sur M d'une métrique kählerienne g dont la courbure de Ricci vérifie l'égalité

$$Ricc(g) = -\Omega.$$

En chaque point de M, le tenseur de Ricci est donc donné par une forme semi-négative. De plus, par hypothèse de platitude, il existe sur M une collection de sections locales holomorphes ξ_U de $Det\mathcal{F}$ ne s'annulant pas et multiplicativement liées par un cocycle de module 1. En particulier, l'ensemble des $\Delta||\xi_U||^2$ et $||\nabla(\xi_U)||^2$ se recollent en une fonction globale définie sur M (∇ désigne ici la connexion induite par g sur les tenseurs holomorphes de type $(0, n-1)$). Dans ces conditions, l'inégalité de Böchner ([K,W]p.57)s'énonce dans les termes suivants:

$$\Delta||\xi_U||^2 \geq ||\nabla(\xi_U)||^2.$$

Par suite, on obtient que $\nabla(\xi_U) = 0$ pour tout ouvert U du recouvrement. En d'autres termes le fibré $\mathcal{F}$ est parallèle. Un résultat classique de géométrie kählerienne implique alors que son orthogonal est *holomorphe.* Quitte à réappliquer les résultats de [B,P,T], on peut conclure que ce dernier définit un feuilletage *hyperbolique.* La proposition 3.1 résulte alors du classique théorème de décomposition de De Rham joint au fait que $Ricc(g)$ est identiquement nulle en restriction à $\mathcal{F}$.

Précisons maintenant la structure du premier facteur $\tilde{N}$ dans la décomposition du revêtement universel.

Proposition 3.2

La variété $\tilde{N}$ se scinde (holomorphiquement et isométriquement) sous la forme $\mathbb{C}^k \times V$ où V est une variété de Calabi-Yau.

En outre, $\pi_1(M)$ agit diagonalement par isométries sur le produit $\tilde{M} = \mathbb{C}^k \times V \times \mathbb{D}$.

La preuve repose sur le résultat suivant de Cheeger et Gromoll.

Théorème 3.1 ([C,G])

Soit M une variété lisse simplement connexe admettant une métrique riemannienne complète de courbure de Ricci positive ou nulle; alors M se décompose isométriquement sous la forme $\mathbb{R}^k \times V$ telle que V ne contient pas de droite géodésique.

Rappelons qu'une droite géodésique est une géodésique

$$\gamma :]-\infty, +\infty[\to M$$

telle qu'à chaque instant $t, t' \in \mathbb{R}, \gamma_{|[t,t']}$ soit minimale.

Preuve de la proposition 3.2

Puisque la décomposition de De Rham d'une variété kählerienne coïncide avec celle de la variété réelle sous-jascente ([K,N] th 8.1, p 172], on obtient que $\tilde{N}$ se scinde holomorphiquement et isométriquement sous la forme $\mathbb{C}^l \times V$.

Par construction, le groupe fondamental de M agit diagonalement par isométries sur le produit $\tilde{M} = \mathbb{C}^l \times V \times \mathbb{D}$. Il reste à prouver que V est compacte; supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. La contradiction recherchée résulte alors de l'argument suivant dû à Cheeger et Gromoll (*loc.cit*). Soit K un domaine fondamental pour l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$. C'est un compact et sa projection $\rho(K)$ sur V est donc un compact dont l'orbite par $\rho(\pi_1(M))$ est V toute entière. Puisque V est supposée non compacte, il existe en un point $p \in \rho(K)$ un rayon géodésique $\gamma : [0, \infty[\to V$(i.e une demi-droite géodésique) tel que $\gamma(0) = p \in \rho(K)$. Soit g_n une suite d'isométries de $\rho(\pi_1(M))$ telle que $g_n(\gamma(n)) = p_n \in \rho(K)$. La géodésique γ_n de V définie par $\gamma_n(0) = p_n$ et $\gamma_n{}'(0) = dg_n(\gamma'(n))$ est donc un rayon géodésique en restriction à $[-n, \infty[$. Par compacité, on peut extraire une sous-suite n_i de sorte que p_{n_i} et $\gamma_{n_i}{}'(0)$ convergent respectivement vers $p_0 \in \rho(K)$ et $v_0 \in T^1_{p_0}(V)$. Par construction, la géodésique passant en p_0 à la vitesse v est une droite géodésique.

4) PREUVE DU THEOREME 1.2.

Au vu des sections précédentes, il reste à traiter les cas

(1) $\mathcal{F}$ admet un feuilletage en courbes hyperbolique transverse

(2) $\mathcal{F}$ contient un feuilletage en courbe (éventuellement singulier) défini globalement par $\omega \in \Omega^{n-1}(Det\ \mathcal{F})$.

Examinons d'abord le point (1). En reprenant les notations de la section 3, il existe alors une variété de Calabi-Yau V telle que

$$\tilde{M} = \mathbb{C}^l \times V \times \mathbb{D}$$

avec une action diagonale et isométrique de $\pi_1(M)$.

lemme 4.1 *L'action de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{D}$ est discrète.*

Puisque le groupe des isométries de V est fini ([B]), on est ramené à considérer un groupe H dont l'action est libre, discrète, diagonale, cocompacte et isométrique sur le produit $\mathbb{C}^l \times \mathbb{D}$. Il reste à voir que cette action reste discrète sur le second facteur, auquel cas chaque feuille de $\mathcal{F}$ sera fermée, situation décrite par l'exemple iii) du théorème 1.2.

Ceci va résulter du fait général suivant:

Théorème 4.1 (Auslander) (cf.[R] p 149)
Soit G un groupe de Lie et R un sous-groupe connexe, résoluble et distingué. Soit $\pi : G \to G/R$ la projection canonique. Soit H un sous-groupe fermé de G dont la composante neutre H^0 est résoluble. Alors la composante neutre de $\overline{\pi(H)}$ est résoluble.

Preuve du lemme 4.1 Il suffit manifestement de montrer que H, vu comme réseau de $\mathbb{C}^l \times U(l) \times Sl(2,\mathbb{R})$ se projette sur un *réseau* de $Sl(2,\mathbb{R})$. On note H_1 l'image de H par cette projection; remarquons que H_1 n'est pas conjugué à un sous-groupe triangulaire de $Sl(2,\mathbb{R})$ car $\mathbb{C}^l \times \mathbb{D}/H$ est de première classe de Chern non nulle. Par conséquent, H_1 est, soit un réseau, soit dense dans $Sl(2,\mathbb{R})$. Supposons par l'absurde que $\overline{H_1} = Sl(2,\mathbb{R})$. Notons π et π_1 les projections canoniques respectives de $\mathbb{C}^l \times U(l) \times Sl(2,\mathbb{R})$ sur $U(l) \times Sl(2,\mathbb{R})$ et de $U(l) \times Sl(2,\mathbb{R})$ sur $Sl(2,\mathbb{R})$. D'après le théorème d'Auslander, la composante neutre Γ de $\overline{\pi(H)}$ est résoluble; par suite, $\pi_1(\pi(\Gamma))$ est un sous-groupe (non nécessairement fermé) résoluble de $Sl(2,\mathbb{R})$. Par hypothèse, l'adhérence de $\pi_1(H)$ est précisément $Sl(2,\mathbb{R})$; ceci entraîne alors que $\pi(H)$ admet une infinité de composantes connexes $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_1(\Gamma_n)$ soit dense dans $Sl(2,\mathbb{R})$. Il en résulte que $\pi_1(\pi(\overline{H})) = Sl(2,\mathbb{R})$ par compacité de $U(l)$, ce qui est impossible, vu que $Sl(2,\mathbb{R})$ ne peut s'exprimer comme union dénombrable de translatés d'un sous-groupe résoluble.

Il reste à analyser le point (2). Selon la terminologie utilisée par Brunella ($[\mathrm{Br}]_2$), le feuilletage $\mathcal{C}_\omega$ défini par ω n'est pas un feuilletage en courbes rationnelles. En effet , dans le cas contraire, le degré de $K_{\mathcal{F}}$ sur une droite générique de $\mathcal{C}_\omega$ serait strictement négatif.

Dans ces conditions , Brunella (*loc.cit*) a établi que le fibré cotangent de $\mathcal{C}_\omega$ est pseudo-effectif. Par ailleurs, la $n-1$ forme ω est holomorphe à valeurs dans un fibré plat; par adjonction, on obtient alors que K_M et donc ${N_{\mathcal{F}}}^*$ sont pseudo-effectifs.

Le lemme qui suit a été montré par Brunella ($[\mathrm{Br}]_1$) dans le cadre des feuilletages sur les surfaces complexes compactes et s'adapte sans difficultés lorsque la variété ambiante est kählerienne. Nous en donnerons la démonstration par commodité pour le lecteur (voir aussi [B,P,T]).

lemme 4.2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur M Kähler compacte. Supposons que ${N_{\mathcal{F}}}^*$ soit pseudo-effectif; alors il existe un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ invariant par $\mathcal{F}$.*

Preuve: Par hypothèse, le fibré ${N_{\mathcal{F}}}^*$ admet une métrique singulière dont les poids locaux sont plurisousharmoniques. La forme de courbure de cette métrique est donc donnée par un courant positif T localement défini par $T = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}F$, où F est un poids local de la métrique. On peut choisir ces poids locaux de façon à obtenir sur M une forme η (à priori non lisse) telle que, localement:

$$\eta = \sqrt{-1}e^{2F} df \wedge d\overline{f}.$$

où $\{df = 0\}$ est une équation locale de $\mathcal{F}$. Soit θ une forme de Kähler; on déduit du théorème de Stokes (pour les courants) que

$$\int_M \partial\overline{\partial}\eta \wedge \theta^{n-2} = 0$$

D'autre part, le courant $\partial\overline{\partial}\eta$ est positif (l'exponentielle d'une fonction *psh* est *psh*). La nullité de l'intégrale précédente implique alors que e^F est pluriharmonique et donc constante *dans les feuilles.*

L'existence d'un tel courant invariant par holonomie confère au feuilletage $\mathcal{F}$ des propriétés qualitativement semblables à celles des feuilletages riemanniens. Plus précisément, il est montré dans $[\mathrm{Br}]_1$ que $\mathcal{F}$ entre dans la catégorie des feuilletages quasi-uniformément isométriques étudiés par Kellum ([K]). Suivant Brunella (*loc.cit*) , on peut alors affirmer que M est union disjointe de minimaux de $\mathcal{F}$, chaque minimal étant soit une feuille compacte, soit une sous-variété réelle topologique de codimension 1, soit M.

Si le feuilletage est minimal, on obtient par transitivité(voir $[\mathrm{Br}]_1$ pour les détails) que $\mathcal{F}$ admet une métrique lisse transverse invariante par holonomie et de courbure négative constante. De même que dans la preuve de la proposition 3.1, on peut alors invoquer le théorème de Yau pour conclure à l'existence d'un feuilletage *holomorphes* en courbes *transverse.*

Si l'on élimine le cas des fibrations (iii)du théorème 1.2), il reste à étudier les feuilletages comportant un minimal de codimension 1 réelle. Ceux ci sont décrits comme suit ($[\mathrm{Br}]_1$):

a) l'adhérence de chaque feuille est de codimension 1 réelle.

b) il y a exactement deux feuilles compactes et les autres feuilles ont des adhérences de codimension 1.

Rappelons maintenant un des principaux résultats de Kellum: dans le cadre quasi-isométrique, l'adhérence du pseudo-groupe d'holonomie est un pseudo groupe de Lie. En particulier, on hérite d'un faisceau localement constant de germes de champs de vecteurs transverses à $\mathcal{F}$. Par un argument qu'on peut trouver par exemple chez [Lo,Re], l'ensemble de ces germes est en chaque point une algèbre de Lie (réelle) de champs de vecteurs holomorphes. Cette algèbre est visiblement de dimension 1 dans les cas a) et b) ci-dessus. Par dualité, le feuilletage $\mathcal{F}$ est donné par une forme logarithmique (éventuellement à valeurs dans un fibré plat) sans diviseurs de zéros et dont l'ensemble des pôles est précisément formé de la réunion des feuilles compactes. On élimine ainsi le cas b), incompatible avec la pseudo-effectivité du fibré conormal. Dans la situation a), ${N_{\mathcal{F}}}^*$ est numériquement trivial (exemple i) du théorème 1.2).

BIBLIOGRAPHIE

[B] A.Beauville; *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J.Differential Geom.18 (1983), 4, 755-782.

[Bo] F.A Bogomolov; *Kähler manifolds with trivial canonical class*, Math.USSR Izvestija, Vol.8 (1974), N^o 1.

[B,P,T] M. Brunella, J.V. Pereira, F.Touzet; *Kähler manifolds with split tangent bundle*, Bulletin de la SMF **134**, fasc. 2 (2006).

$[\mathrm{Br}]_1$ M. Brunella; *Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes*, Ann.scient.Ec.Norm 4^e série,t.30,1997, p.569-594.

$[\mathrm{Br}]_2$ M.Brunella; *A positivity property for foliations on compact Kähler manifolds*, Intern.J.Math. 17 (2006), 1, p. 35-43.

[C,G] J.Cheeger,D.Gromoll; *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J.differential geometry 6 (1971/72), 119-128.

[K] M.Kellum;*Uniformly quasi-isometric foliations* Erg.th.Dyn.Sys,Vol.13 (1993) P.101-122.

[K,N] S.Kobayashi, K.Nomizu; *Foundations of differential geometry. Vol.II.* Wiley & sons, Inc.,New York,1996.

[K,W] S.Kobayashi,H.Wu;*Complex differential Geometry*, DMV Seminar Band 3, Birkhäuser,(1987).

[L,R] F.Loray, J.C.Rebelo;*Minimal, rigid foliations by curves on* $\mathbb{CP}(n)$, Journ.Euro.Maths.soc.5 (2003),p.147-201.

[R] M.S Raghunatan; *Discrete subgroups of lie groups*, Erg.der.Math, 68, Springer, (1972).

[Y] S.T. Yau;*On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*,I, Comm.Pure Appl.Math.31 (1978),339-411.